Tentamen Functietheorie 1 **18 maart 1999**

duur: 3 uur

1. (a) [3]Geef de drie complexe oplossingen van de vergelijking $z^3 = i$ in de vorm $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

   (b) [3] Geef de definitie van de hoofdtak van de derdemachtswortel uit z, $\sqrt[3]{z}$, en toon aan: $Re(z) > 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{z^2} = (\sqrt[3]{z})^2$.

   (c) [3]Laat $\sqrt[3]{z}$ de hoofdtak van de derdemachtswortel uit z zijn. Voor welke $z \in \mathbb{C}$ geldt $\sqrt[3]{z^3} = z$?

2. Stel de functie $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ is analytisch en $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ met $u(x, y), v(x, y)$ reëel voor $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$. De onderdelen a) en b) zijn onafhankelijk van elkaar.

   (a) [5] Bepaal $v(x, y)$ als gegeven is: $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ en $f(0) = 0$. (Gebruik de Cauchy-Riemann vergelijkingen.)

   (b) [4]Stel nu dat gegeven is: $u(x, 0) = x^2 + x$ en $v(x, 0) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Druk, voor $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ uit in z; formuleer nauwkeurig de stelling die je hierbij gebruikt.

3. (a) [3] Bepaal de convergentiestralen van de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ als $a_n = \frac{n}{2^n+1}$.

   (b) [6] Geef de Laurentreeks naar z van $f(z) = (z(z-2))^{-2}$ op het gebied $0 < |z| < 2$ en op het gebied $|z| > 2$ (hint: $(z-2)^{-2} = \frac{d}{dz}\{(2-z)^{-1}\}$)

4. (a) [3] Formuleer een vorm van de residuenstelling.

   (b) [3] Bereken de contourintegraal $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z-2)}$.

   (c) [3] Bereken de contourintegraal $\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-2)^2}$.

5. Bereken $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$ door een geschikte contourintegraal $\int_{C_R} f(z)dz$ te beschouwen. Volg het schema:

   (a) [2] Geef de definitie van de te gebruiken functie $f(z)$, i.h.b. van $\sqrt{z}$, en beschrijf de contour C_R.

   (b) [3] Bespreek het limietgedrag van onderdelen van de integraal voor $R \longrightarrow \infty$.

   (c) [3] Bereken de benodigde residuen.

   (d) [1] Bereken de integraal.

Per opgave [1] vooraf.